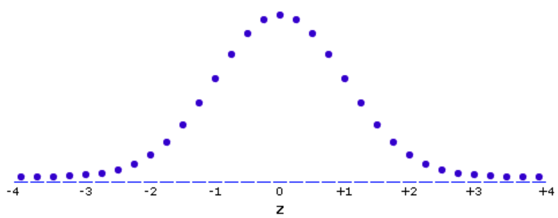
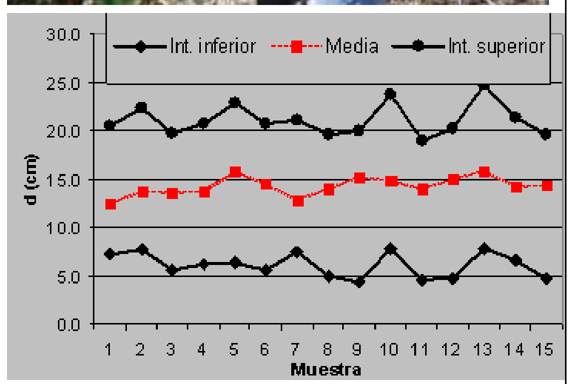
INTERVALOS DE CONFIANZA

Cuantificando la variabilidad muestral





JORGE FALLAS

2012

Índice

1. Introducción

La investigación en cualquiera de sus expresiones (e.g. ambiente, social, economía, recursos naturales) busca responder a muy diversas interrogantes sobre una población particular. Las preguntas pueden plantearse en términos de estadística descriptiva o de estadística inferencial. El primer caso ya fue tratado en los capítulos previos. En el segundo caso, interesa estimar el valor de un parámetro de una población; por ejemplo: la diversidad media por hectárea en el bosque tropical de Zona Norte, el carbono total almacenado en una finca o las toneladas de desechos sólidos recibidos semanalmente por un a un relleno sanitario.

Por razones de tiempo y costo, para responder a las preguntas anteriores no es posible medir todos los elementos de la población y por esta razón se recurre al muestreo. Como se observó en el capitulo previo toda estimación tiene un error estadístico asociado. Es importante recordar que este error no se debe a mediciones incorrectas o imprecisas sino al hecho de que no se muestrea toda la población.

Dado el escenario anterior, surge la pregunta ¿cómo sabemos si dos estimaciones *son estadísticamente iguales*? Y aquí surge otra confusión. En el lenguaje cotidiano se dice “un dos es igual a otro dos” o 1984,5 es igual a 1984,5. Esto parece bastante lógico y convincente; sin embargo en el lenguaje estadístico 1984,5 puede ser *estadísticamente igual* a 1900. Alguien puede pensar, ¿cómo puede ser esto posible? Pues bien, la respuesta está en el error de estimación. Recordemos que cada estimación representa el valor del parámetro y por lo tanto su valor numérico siempre será ligeramente diferente. Hasta aquí, todo parece bien. Pero ¿cuánto es ligeramente diferente? La estadística no ayuda a responder a esta pregunta mediante el cálculo de un *intervalo de confianza*. A qué bien, otro término. Si y posiblemente no será el último. El objetivo del presente capitulo es que usted pueda entender y aplicar los conceptos que sustentan el cálculo de un intervalo de confianza.

En el presente capítulo usted calculará e interpretará intervalos de confianza para la media y la varianza de poblaciones normales. También aprenderá cómo utilizar las tablas de Z (distribución normal estandarizada), “t” de Estudiante, F y Chi-cuadrado.

Para elaborar intervalos de confianza es necesario ejecutar los siguientes pasos:

1. Definir población y seleccionar muestra.

2. Calcular media y desviación estándar.

3. Probar por normalidad de los datos.

4. Si los datos no cumplen con el supuesto de normalidad debe transformarlos. O puede utilizar opciones no paramétricas como el remuestreo (e.g, software gratuito Resampling Stats[1] o XLSTatistics).

5. Seleccionar el nivel de confianza.

6. Calcular el intervalo de confianza (seleccionar software a utilizar).

7. Interpretar el intervalo. ¿Cuáles son los argumentos estadísticos, biológicos, sociales, o de otra índole que le permiten explicar los resultados obtenidos?

8. ¿Cuál sería su recomendación final (acción)? ¿Otro estudio?

2. Intervalos de confianza para la media y la varianza

Antes de iniciar con el tema de intervalos de confianza, recordaremos dos definiciones importantes:

Parámetro: son valores desconocidos propios de una población.
Estimador: Dado que en trabajos empíricos sólo es posible obtener una estimación puntual del parámetro (e.g. la media) es necesario indicar el grado de variabilidad muestral del estimador. Esto puede lograrse calculando un intervalo de confianza para el estimador. A continuación de describe cómo construir intervalos de confianza para la media, la varianza y la desviación estándar.

Al calcular un intervalo de confianza para la media pueden presentarse los siguientes escenarios:

1) Intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal y con varianza conocida. Este escenario, aunque posible, tiene poca utilidad práctica, pues lo más frecuente es que no se conozca el valor de los parámetros; sin embargo tiene utilidad desde el punto de vista teórico.

2) Intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal y con varianza desconocida. Este es el escenario más frecuente en aplicaciones de la vida real.

2.1 Intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal y con varianza conocida

Como se mencionó, este escenario es poco útil desde el punto de vista práctico pues para utilizarlo usted requiere conocer la varianza de la población (σ). Recordemos que la media es una variable aleatoria que posee una distribución muestral (o sea su valor cambia de muestra a muestra).

[1] http://www.uvm.edu/~dhowell/StatPages/Resampling/ResamplingPackage.zip

Supuesto: Las muestra proviene de una *población normal* con *varianza conocida*. En la práctica, esto es una situación muy poco probable; sin embargo su cálculo nos sirve para ilustrar algunos aspectos teóricos de los intervalos de confianza.

El intervalo de confianza para la media poblacional está dado por:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \qquad (1)$$

Donde: P indica la probabilidad de la expresión entre paréntesis, la cual es igual a 1-α, valor conocido como *nivel de confianza*. Alfa (α) representa el área bajo la curva no contenida por el intervalo. Los valores de alfa más frecuentes son:

Alfa	nivel de confianza
0,1	90%
0,05	95%
0,01	99%

Observe que existe una estrecha relación entre el valor de alfa y el nivel de confianza del intervalo de confianza.

Algunos comentarios sobre la fórmula:

1. A primera vista parece aterradora, pero en realidad no lo es.

2. Observe que el intervalo se construye para el parámetro (en este caso la media de la población μ) y no para el estimador.

3. El termino $\sigma/ (n)^{0.5}$ es el error estándar que se estudió en el segundo y tercer capítulo

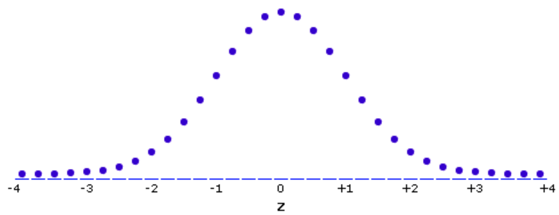
4. "n" representa el tamaño de la muestra, tal y como se discutió en el capítulo de muestreo.

5. $\bar{X}$ representa la media de la muestra.

6. Z 1-α/2 corresponde al valor de dicha expresión en una tabla de distribución Z.

Dado que conocemos el valor del parámetro (σ), se utilizan los valores estandarizados de la distribución normal (tabla valores Z). Un valor de "Z" (también conocido la puntuación estándar o puntaje normal) es una medida de la divergencia entre un resultado individual experimental con respecto a la media, la cual es el resultado más probable. "Z" se expresa en términos del número de desviaciones estándar con respecto a la media.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathbf{N}(0,1) \qquad (2)$$



La amplitud del intervalo de confianza es:

$$2 * Z_{1-\alpha/2} * \frac{\rho}{(n)^{0.5}} \qquad (3)$$

Esta igualdad reconoce que la *media* es una variable aleatoria que posee una distribución muestral. Si sustituimos los símbolo de la fórmula uno por valores específicos obtendremos dos valores; los cuales representan el límite inferior y superior del intervalo. Sin embargo, dado que μ y los límites del intervalo son constantes, no podemos afirmar que existe una probabilidad de $1-\alpha$ de que μ se encuentre entre dichos límites. De hecho, pertenece o no al intervalo y no es posible por lo tanto asignar una probabilidad de $1-\alpha$ a dicha afirmación. Recordemos que la media es una variable aleatoria y que por lo tanto variará de una muestra a otra.

La probabilidad de $1-\alpha$ se refiere a dicha variación. Para resolver esta ambigüedad se asignará a la media el sufijo "o"; el cual indica que esta media es sólo uno de las tantos valores que puede tomar y que por lo tanto el intervalo de confianza calculado es sólo uno de los tantos posibles que pueden obtenerse de la población. La probabilidad $1-\alpha_{/}$ indica que de los posibles intervalos solo $1-\alpha$ contendrán μ. Por ejemplo, si α es 0,05; entonces de 100 intervalos calculados solo 95 contendrán a μ.

¿Cómo interpretar el intervalo?

Si una vez calculado el intervalo no es posible afirmar que existe una probabilidad de $1-\alpha$ de que μ se encuentre en el intervalo, que debe decirse. La solución es simple, se reemplaza la palabra "probabilidad" por "confianza" y se dice que tenemos la confianza de que $1-\alpha$ veces μ estará contenido entre los límites del intervalo. Y la fórmula 1 cambia:

$$C\left(\overline{X} - Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \qquad (4)$$

Dado que en teoría existe un número infinito de muestras (población infinita), también existirá un número infinito de intervalos de confianza para μ.

El valor de 100 * α representa el porcentaje de veces que *en promedio* se espera que el intervalo *no incluya el valor del parámetro*. Por ejemplo, si α es 0,05 esto significa que de cada 20 intervalos uno no incluirá a μ (1/20= 0,05). En términos porcentuales significa que cinco de cada cien intervalos no contendrán a μ.

A continuación se ilustra el uso de las formulas dos y tres:

SUPUESTOS
Población normal, varianza poblacional conocida, media poblacional desconocida.

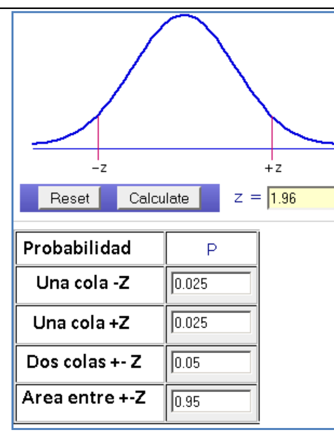
Alfa (α) = 0,05
Nivel de confianza = (1-α) = (1-0,05)*100 = 95%
$\sigma^2 = 25,95\ cm^2$
$\bar{X}$= 35,66 cm
n = 50

La amplitud del intervalo de confianza es igual a:
$\mu \pm Z\,(1-\alpha/2)\ \sigma/(n)^{0,5}$
$Z\,(1-\alpha/2) = Z\,(1-0,025) = Z\,(0,975) = 1,96$ (este valor se obtiene de la tabla Z)

Nota: La distribución normal es simétrica; por lo tanto el valor de Z para 0,975 es igual al de 0,025, solo que con signo negativo. A continuación se muestran los valores críticos de Z para α de 0,1, 0,05 y 0.001. Si lo desea también pude obtener valores de Z de http://vassarstats.net/tabs.html.

Valores críticos de ±z

P	1 cola	2 colas
0,050	1,65	1,96
0,025	1,96	2,24
0,010	2,33	2,58
0,005	2,58	2,81
0,001	3,08	3,3



La figura de la derecha muestra claramente el área bajo la curva excluida por el intervalo de confianza (1-0,95= 0,05). Al elegirse el valor de α se está decidiendo cuán raros o extremos deben ser los valores de la media para que sean excluidas del intervalo y por lo tanto sean considerados como parte de otra población.
$\sigma/(n)^{0,5} = 5,094/(50)^{0,5} = 0,720$

$\mu \pm 1{,}41$cm

Interpretación: Existe una confianza de 95% de que el diámetro medio de la población se encontrará en el ámbito 34.25 a 37.07cm. En la vida practica esto significa que cualquier estimador de la media (μ) que se encuentre en dicho intervalo será considerado estadísticamente igual. Ahora quizás entienda porque 1984,5 puede ser *estadísticamente igual* a 1900.

La amplitud del intervalo puede reducirse de la siguiente manera:

1. **Reducir el nivel de confianza**

La amplitud del nivel de confianza se reduce al aumentar el valor de α. Usualmente no se acepta un nivel de confianza inferior a un 90% (α=0,10); o sea, que sólo estamos dispuestos a errar en 10 de cada 100 intervalos que calculemos. Por ejemplo, para el ejemplo anterior si utilizamos un alfa de 0,10 el intervalo de confianza sería : $\mu \pm 1{,}65 * 0{,}72 = \pm 1{,}19$ cm. Note que la amplitud del intervalo se redujo.

2. **Reducir σ**

La variabilidad de la población puede reducirse modificando la población de interés. Por ejemplo, si queremos estimar un intervalo de confianza para el diámetro medio de roble, podemos restringir la población de interés a aquellas áreas con bosques entre 1500 y 2000 m de elevación y en la zona de los Santos.

3. **Incrementar n**

El incrementar el tamaño de la muestra significa invertir más dinero y tiempo en la toma de datos. El intervalo de confianza decrece en función de la raíz cuadrada del tamaño de la muestra; por lo tanto para reducir la amplitud del intervalo en un 50% se requiere cuadruplicar el tamaño de la muestra.

La amplitud del intervalo es un aspecto de diseño del estudio más que de análisis de los datos. Cambios en σ y “n” sólo pueden realizarse antes de colectar los datos. Dado que el nivel de confianza puede cambiarse una vez que los datos han sido analizados, este debe fijarse *antes de analizar los datos*; esto con el fin de evitar sesgos en el sentido de forzar el intervalos en la dirección deseada por el investigador(a). Los intervalos de confianza más utilizados son 90, 95 y 99%.

Basados en el teorema del límite central sabemos que cuando “n” es suficientemente grande la distribución de la media será aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n, aún cuando las muestras provengan de una distribución no normal.

En general, podemos concluir que los intervalos de confianza calculados previamente son aplicables a poblaciones cuya distribución es no normal. La naturaleza y grado de la no normalidad determinarán el tamaño de la muestra necesario para superar esta restricción. De estudios previos se ha concluido que cuando la población es muy asimétrica una muestra de 20 a 25 observaciones es suficiente para asegurar una aproximación adecuada a la distribución normal; algunos otros autores sugieren 30 observaciones.

2.2 Intervalo de confianza para media de población normal con varianza desconocida

La varianza de la muestra, S^2, se utiliza para estimar σ^2, la varianza poblacional y la cantidad:

$$\bar{X} - \mu / S / (n)^{0,5} \quad (5)$$

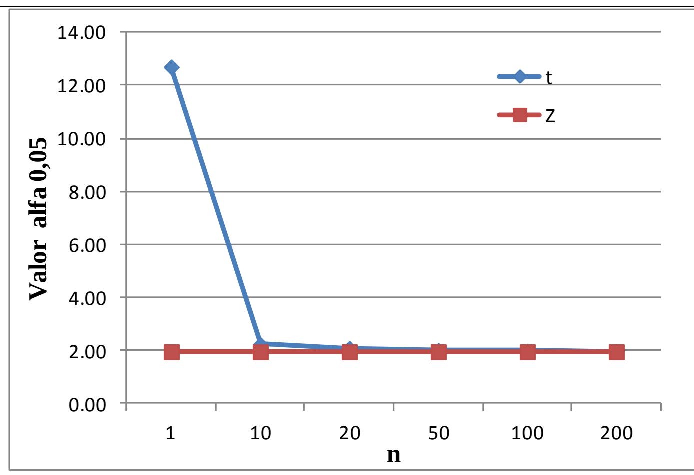
es una variable aleatoria que depende de la media y de la desviación estándar; y que sigue la distribución t de Estudiante. Sin embargo si el tamaño de la muestra (n) es suficientemente grande su valor aproxima a la distribución normal.

La distribución "t" depende de un parámetro denominado grados de libertad (n-1) y es simétrica alrededor de cero; por lo tanto los percentiles para P<0,5 corresponden a los valores negativos de P>0,5. Por ejemplo: $-t_{0,20} = t_{0,80}$ y $-t_{0,10} = t_{0,90}$.

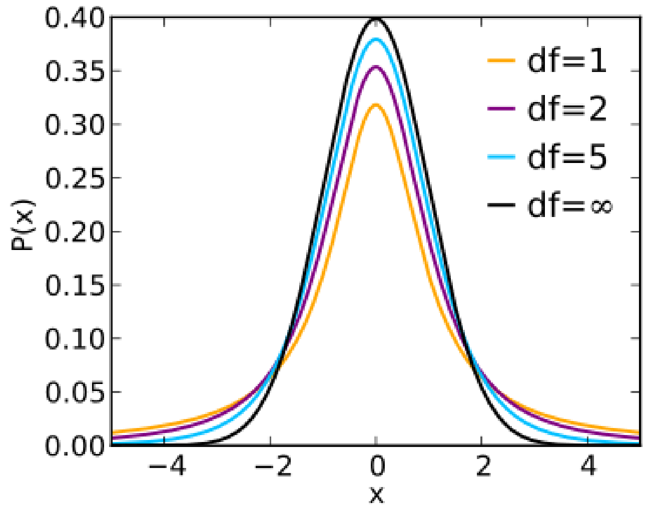
El número de grados de libertad es igual a n-1, donde n es el tamaño de la muestra. La distribución "t" aproxima a la normal conforme aumenta el tamaño de la muestra como se muestra a continuación para un α de 0,05.

gl	t	Z
1	12,706	1,96
10	2,228	1,96
20	2,086	1,96
50	2,008	1,96
100	1,984	1,96
200	1,971	1,96

g.l: grados de libertad (n-1)
t: valor de "t" para α 0,05
Z: valor de "Z" para α 0,05



A



B

Figura 1: A. Valores de Z y t para diferentes tamaños de muestra y un α de 0,05. B. Esta gráfica ilustra el efecto del tamaño de la muestra sobre la forma de la distribución “t”; conforme aumenta el tamaño de muestra su forma aproxima a la distribución normal.

El intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza de 1-α está dado por:

$$C\left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2} * \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\alpha/2} * \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \qquad (6)$$

El termino $t_{1-(\alpha/2)}$ es el percentil 100 (1-α/2) de la distribución t de Estudiante con n-1 grados de libertad. Observe que el IC de 95% excluye 2,5% de valores a ambos lados de la cola de la distribución de t. Dado que podemos seleccionar un número infinito de muestras de tamaño n, existen también un número infinito de intervalos de confianza para μ.

El intervalo de confianza depende de la desviación estándar que es una variable aleatoria y por lo tanto cambiará de muestra a muestra. Esto implica que diferentes muestras de tamaño “n” producirán intervalos que difieren tanto en su punto medio como en su amplitud. Al igual que para el caso anterior, los factores que afectan la amplitud del intervalo son:

1. nivel de confianza (1-α)
2. Valor de la desviación estándar (σ) y
3. Tamaño de la muestra.

Para calcular un intervalo de confianza se selecciona una muestra aleatoria de tamaño “n” y se calcula su media y la desviación estándar. Dado que a partir de este momento todos los valores son constantes no podemos decir que μ se encuentra en el intervalo con una probabilidad 1-α; sino que tenemos una confianza de 1-α de que μ estará contenida en el intervalo que hemos calculado. Matematicamente lo expresamos así:

$$\bar{X}_o - t\ 1\text{-}(\alpha/2) * S_o / (n)^{0,5} < \mu < \bar{X}_o + t\ 1\text{-}(\alpha/2) * S_o / (n)^{0,5} \qquad (7)$$

El intervalo de confianza para la media está basado en el *supuesto de normalidad*, sin embargo como ya hemos visto también es válido para muestras obtenidas de distribuciones no normales siempre y cuando el tamaño de la muestra sea grande.

La amplitud del intervalo de confianza es igual a:

$$\mu \pm t\ (1\text{-}\ \alpha/2)\ S/(n)^{0.5} \qquad (8)$$

Ejemplo: A continuación se ilustra el uso de la formula siete para 18 valores de precipitación anual (mm) de la estación Juan Santa María para el periodo 1956-1973.

Año	Juan Santa María	Año	Juan Santa María	Año	Juan Santa María
1956	2442	1963	1606	1970	2046
1957	1869	1964	1724	1971	2353
1958	1379	1965	1598	1972	1852
1959	1519	1966	1843	1973	2280
1960	1900	1967	1539		
1961	1863	1968	2237		
1962	2078	1969	2231		

Supuestos
Población normal, varianza poblacional desconocida, media poblacional desconocida.

1. Calcular media y desviación estándar.

Numerical Summaries for Juan Sta María					
Number	18	Kurtosis	-1.02836	Min	1379.2
Mean	1908.894	10 % Tr mean	1908.681	Q_1	1635.525
St Dev	314.6442	StdErr Mean	74.16235	Median	1865.85
Coeff of Var	0.164831			Q_3	2193.05
Skew	0.092156			Max	2442

2. Probar por normalidad de los datos. A continuación se muestra el gráfico y probabilidad normal y el resultado de la prueba de hipótesis sobre la normalidad de los datos.

Comentarios:

1. Los datos de precipitación anual (mm) se alinean en una recta en la grafica de probabilidad normal, lo cual es un indicador de que los datos se ajustan a una distribución normal.

2. La prueba de hipótesis sobre normalidad confirma la primera apreciación sobre la normalidad del set de datos y por lo tanto concluimos que se cumple con el supuesto de normalidad requerido para calcular el intervalo de confianza.

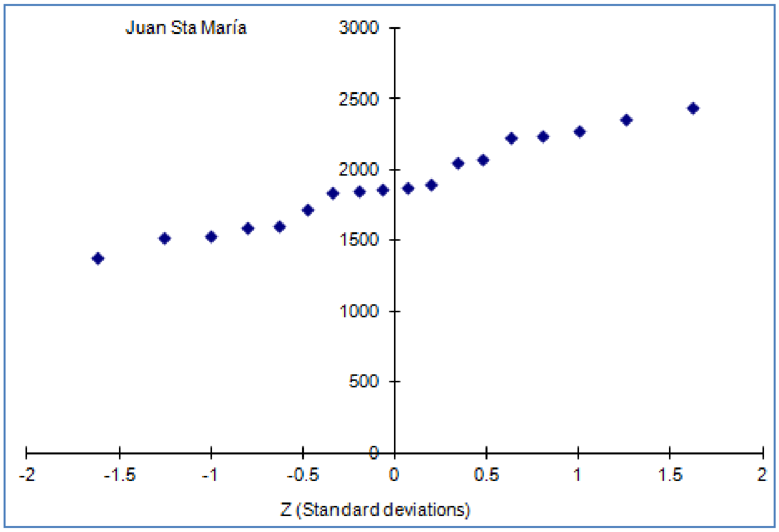
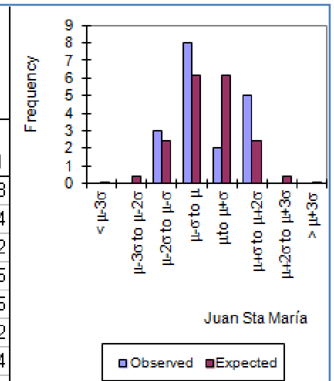


Grafico de probabilidad normal.

Data

Mean (μ)	1908.894
St Dev (σ)	314.6442

	Proportions		Frequencies	
Range	Observed	Expected	Observed	Expected
< μ-3σ	0	0.00135	0	0.024298
μ-3σ to μ-2σ	0	0.0214	0	0.385204
μ-2σ to μ-σ	0.166667	0.135905	3	2.446292
μ-σ to μ	0.444444	0.341345	8	6.144205
μ to μ+σ	0.111111	0.341345	2	6.144205
μ+σ to μ+2σ	0.277778	0.135905	5	2.446292
μ+2σ to μ+3σ	0	0.0214	0	0.385204
> μ+3σ	0	0.00135	0	0.024298



Hypothesis Test

H_0: Population is normally distributed with the stated Mean and St Dev

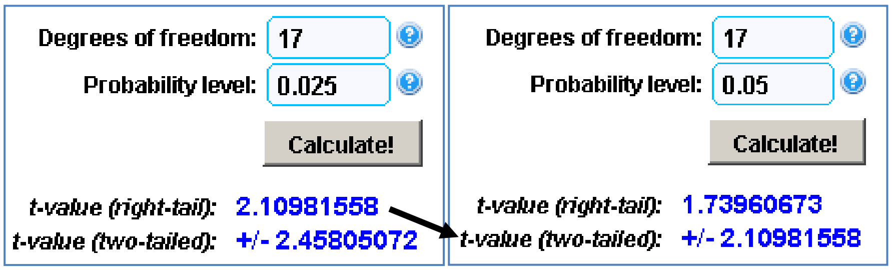
H_1: Population is not normally distributed with the stated Mean and St Dev

Chisquare	6.965923
DF	7
p-value =	0.432437

Resultado de la prueba de hipótesis sobre la normalidad del set de datos. Observe que la hipótesis nula (a probar) es “la población tiene una distribución normal con la media y desviación estándar indicada”; en este caso media: 1908,89 mm y desviación estándar: 314,64 mm. Dado que el valor de p es igual a 0,43 se acepta la hipótesis nula. Normalmente Ho es rechazada cuando “p” es menor que 0,05. Trataremos este tema con mayor detalle en el próximo capítulo.

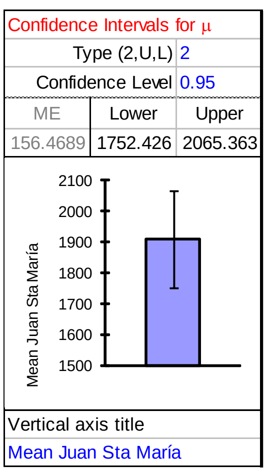
3. Seleccionar el nivel de confianza (1-α). Alfa (α). Calcularemos un IC con un nivel de confianza de 95%.

4. Calcular grados de libertad gl= n-1 (cuando utilice una tabal de t). Dado que el tamaño de muestra es 18, los grados de libertad son 17 (18-1=17). Usted necesita conocer este valor si desea utilizar la tabla de valores de t. Sugiero utilizar http://www.danielsoper.com/statcalc3/calc.aspx?id=10 para calcular los valores de "t".



Observe que el valor de una cola (*t-value right-tail*) para g.d. 17 y un nivel de probabilidad de 0,025 es igual al nivel de probabilidad de 0,05 para dos colas (*t-value two-tailed*). Si desea calcular el IC manualmente utilizando las fórmulas siete u ocho, debe digitar el valor del percentil 1-α/2 y utilizar el valor de "t" correspondiente a la cola superior. Recuerde que el valor de la cola inferior es igual al de la superior solo que con signo opuesto.

5. Calcular el intervalo de confianza. A continuación se muestra el IC calculado con XLStatistics.



El valor 2 le indica al programa que desea un intervalo de confianza (dos colas)
U: indica que solo desea el límite superior.
L: indica que solo desea el límite inferior.
Confidence level: En esta celda usted puede definir el nivel de confianza deseado e.g. 90% (0,90), 95% (0,95), 99% (0,99)
IC 95 % para μ: 1752,43 a 2065,36 mm.
<u>*Interpretación*</u>: Con una confianza de 95% se puede afirmar que el intervalo contiene a la media poblacional (μ). En términos prácticos lo que se afirma es que de cada 100 intervalos que se calculen solo 95 contendrán a μ.
$ME = t_{(1-\alpha,\, n-1)} * (S/\sqrt{n})$

Recuerde que siempre existirá un número infinito de intervalos de confianza aunque en la práctica sólo se trabaje con uno. El cuadro 1 y la figura 1 muestran el intervalo de confianza para 15 muestras de tamaño 10 obtenidas de 100 mediciones de diámetro.

NOTA: La función de Excel para calcular IC es:

Cuadro 1: Intervalo de confianza para quince muestras aleatorias de tamaño diez obtenidas de una parcela de cien árboles de Jaúl.

Muestra	Media (cm)	S (cm)	Lim. Inf. (cm)	Lim. Sup. (cm)
1	16.5	7.3	12.5	20.5
2	18.1	7.8	13.8	22.4
3	16.7	5.6	13.6	19.8
4	17.3	6.3	13.8	20.8
5	19.4	6.4	15.9	22.9
6	17.6	5.6	14.5	20.7
7	17.0	7.5	12.9	21.1
8	16.8	5.0	14.0	19.6
9	17.6	4.4	15.2	20.0
10	19.3	7.9	14.9	23.7
11	16.5	4.6	14.0	19.0
12	17.6	4.7	15.0	20.2
13	20.3	7.9	15.9	24.7
14	17.8	6.6	14.2	21.4
15	17.0	4.7	14.4	19.6

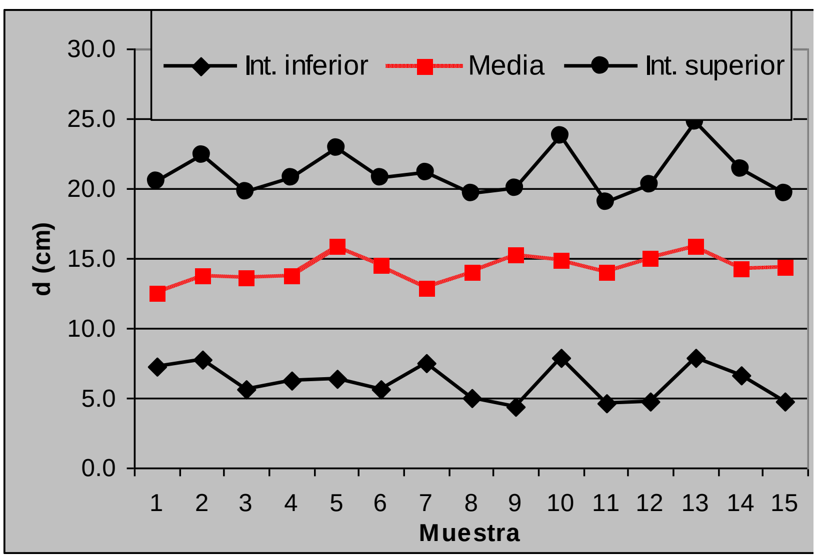


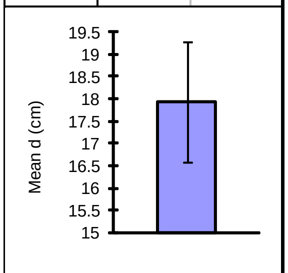
Figura 2: Intervalos de confianza para quince muestras de tamaño diez.

2.2. Intervalos de confianza con XLStatistics

A continuación se ilustra cómo calcular un intervalo de confianza utilizando XLStatistics utilizando cien valores de diámetro (cm).

1. Lea sus datos con Excel.
2. Active el complemento XLStatistics
3. Seleccione sus datos y 1Num.
4. Visualice la pestaña "test". La sección de la hoja correspondiente a "Confidence Intervals for μ" contiene el intervalo de confianza. Recuerde que usted puede modificar los valores de las celdas de color azul.

Confidence Intervals for μ		
	Type (2,U,L)	2
	Confidence Level	0.95
ME	Lower	Upper
1.357456	16.57254	19.28746



Vertical axis title

Mean d (cm)

El valor 2 le indica al programa que desea un intervalo de confianza (dos colas)

U: indica que solo desea el límite superior.

L: indica que solo desea el límite inferior.

Confidence level: En esta celda usted puede definir el nivel de confianza deseado e.g. 90% (0,90), 95% (0,95), 99% (0,99)

IC 95 % para μ: 16,57 a 19,28 cm.

Interpretación: Con una confianza de 95% se puede afirmar que el intervalo contiene a la media poblacional (μ). En términos prácticos lo que se afirma es que de cada 100 intervalos que se calculen solo 95 contendrán a μ.

$ME = t_{(1-\alpha,\, n-1)} * (S/\sqrt{n})$

2.3. Intervalo de confianza para varianza y desviación estándar para una muestra proveniente de una distribución normal

La varianza muestral (S^2) es un estimador insesgado y de varianza mínima de la varianza de la población normal (σ^2). Sin embargo, la desviación estándar (S) es un estimador sesgado de σ. El sesgo se reduce rápidamente al aumentar el tamaño de la muestra (n).

El intervalo de confianza para σ^2 se basa en el hecho de que:

$$[(n-1)* S^2] / \sigma^2 \qquad (8)$$

tiene una distribución de chi-cuadrado con n-1 grados de libertad. La distribución de chi-cuadrado, al igual que t, depende de sólo un parámetro denominado *grados de libertad*, el cual sólo toma valores positivos. La distribución de X^2 presenta una asimetría positiva por cuanto su cola derecha tiende a infinito.

La expresión probabilística que origina el intervalo de confianza es:

$$P\left(\frac{(n-1)*S^2}{X^2\ 1-(\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)*S^2}{X^2(\alpha/2)}\right) = 1-\alpha \qquad (9)$$

Los intervalos calculados en esta sección y en las anteriores corresponden a un nivel de confianza de 1-α y en todos los casos hemos decidido excluir un área correspondiente a α/2 en ambas colas de la distribución. En el caso de la distribución normal estandarizada (Z) y la distribución "t" utilizamos intervalos simétricos porque tienen una amplitud mínima, comparados con intervalos asimétricos para un mismo nivel de confianza.

$$\frac{n-1 * S^2}{X^2 1-(\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{n-1* S^2}{X^2(\alpha/2)} \qquad (10)$$

Un evento equivalente al anterior puede obtenerse extrayendo la raíz cuadrada de los tres términos:

$$\left[\frac{n-1* S}{X^2 1-(\alpha/2)}\right]^{0,5} < \sigma < \left[\frac{n-1* S2}{X^2(\alpha /2)}\right]^{0,5} \qquad (11)$$

El intervalo anterior corresponde a la desviación estándar poblacional y su nivel de confianza es 1-α. Para calcular un intervalo específico para σ^2 solo tenemos que sustituir S^2 por S^2_0. Recuerde que el cálculo del IC para la desviación estándar asume que los datos provienen de una distribución normal y a diferencia del IC para la media, en este caso una violación a este supuesto se traduce en un IC sesgado.

A continuación se utilizan los datos de diámetro del archivo d_h_jaul_IC_Var.xlsx para ilustrar el uso de de X^2 en el cálculo del intervalo de confianza para σ^2 y σ, respectivamente.

Calculo de intervalo de confianza para σ^2

Nota: XLSTatistics no calcula el intervalo de confianza para la varianza ni para la desviación estándar; sin embargo puede utilizarse para calcular los insumos requeridos por el IC.

Numerical Summaries for diámetro (cm)					
Number	46	Kurtosis	-0.905	Min	10
Mean	35.65217	10 % Tr mean	35.15	Q_1	22.25
St Dev	15.65065	StdErr Mean	2.307563	Median	33.5
Coeff of Var	0.438982			Q_3	45
Skew	0.278263			Max	68

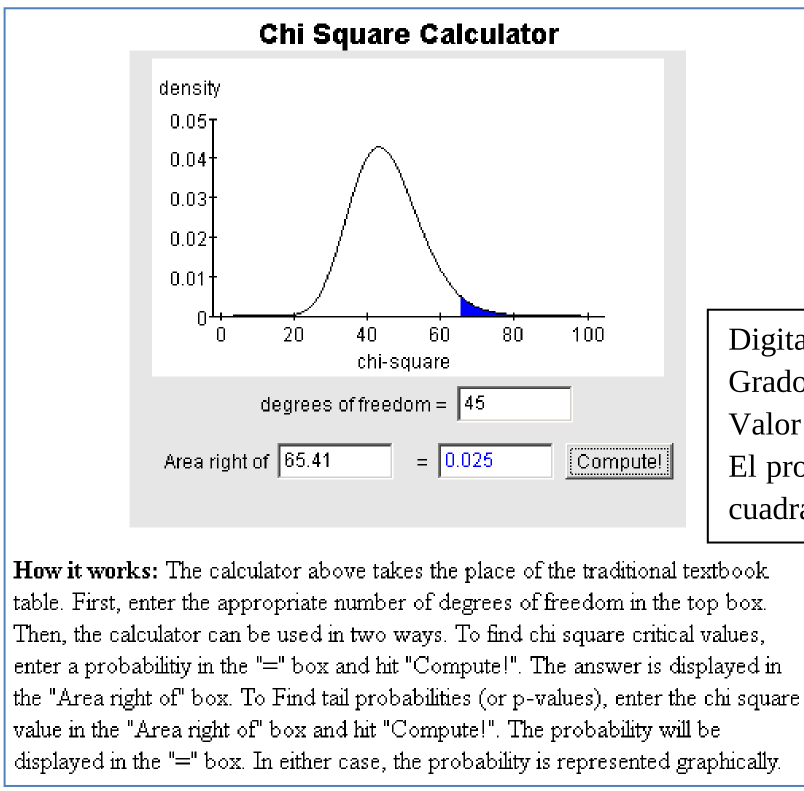
$S^2o = (15,650)^2 = 244,9225\ cm^2$
n=46
g.l.: n-1= 46-1= 45
n-1*S^2o = 45* 244,9225 = 11.021,513

alfa (α)= 0,05
g.l.= 45
X^2 (0,025) = 65,4101
X^2 (0,975) = 28,3661

alfa (α) = 0,01
g.l.= 45
$X^{2\,(}$0,005) = 73.1660
X^2 (0,995) = 20,1366

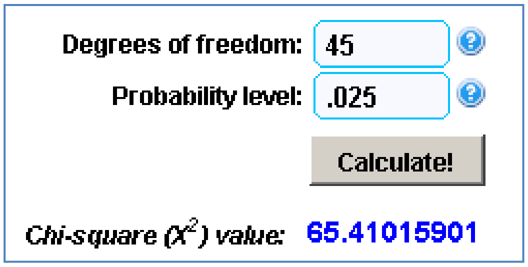
El siguiente vínculo ofrece una interfaz gráfica para calcular valores de X^2.

http://www.stat.tamu.edu/~west/applets/chisqdemo.html (redondea valores)



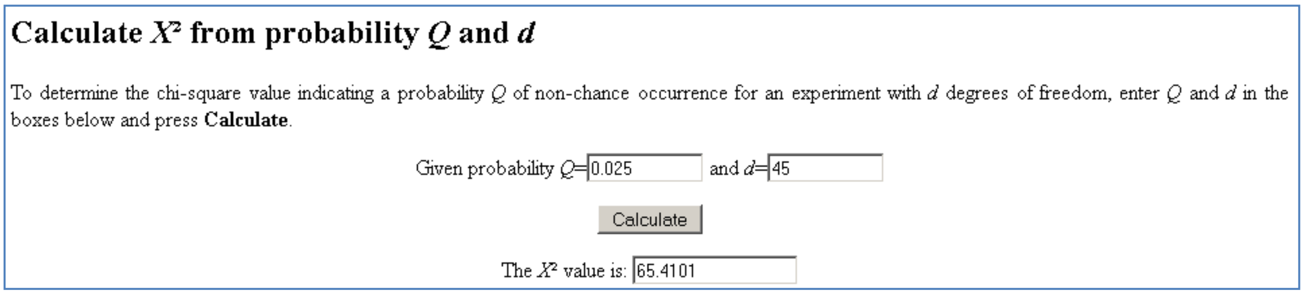
Digitar:
Grados de libertad: 99
Valor de alfa medios: ejemplo 0.025
El programa calcula el valor de Chi-cuadrado: 128.4

http://www.danielsoper.com/statcalc3/calc.aspx?id=12 (ofrece más decimales)



Digitar:
Grados de libertad: 99
Valor de alfa medios: ejemplo 0.025
El programa calcula el valor de Chi-cuadrado: 128.421

http://www.fourmilab.ch/rpkp/experiments/analysis/chiCalc.html (ofrece más opciones)



Calculo del intervalo de confianza para σ^2

$$\frac{n-1 * S^2}{X^2 1-(\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{n-1 * S^2}{X^2(\alpha/2)}$$

Nivel del confianza	Intervalo (cm^2)	
	Límite inferior	Límite superior
95%	$168.50 < \sigma^2$	$\sigma^2 < 388.55$
99%	$150,637 < \sigma^2$	$\sigma^2 < 547,337$

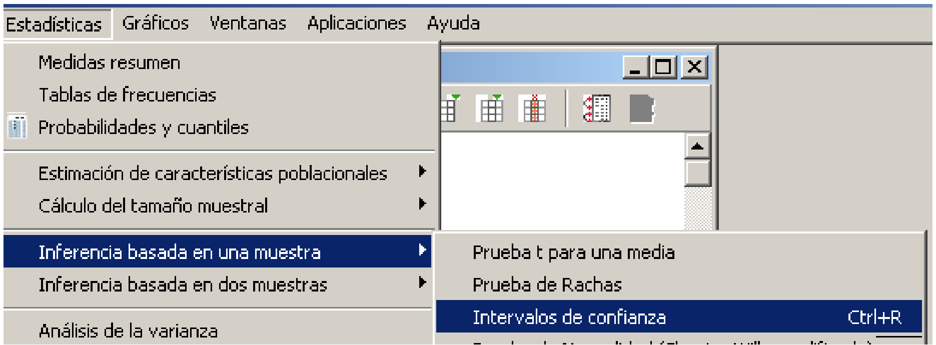
Calculo del intervalo de confianza para σ

Nivel del confianza	Intervalo (cm)	
	Límite inferior	Límite superior
95%	$12,98 < \sigma$	$\sigma < 19,71$
99%	$12,27 < \sigma$	$\sigma < 23.40$

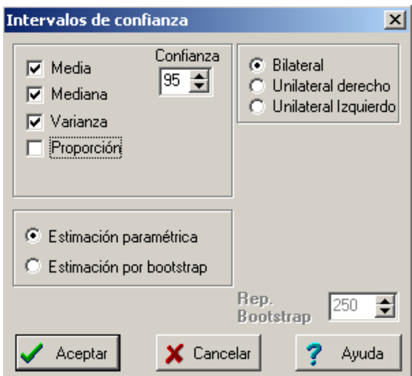
3. Intervalos de confianza en Infostat

A continuación se muestra el uso de Infostat para el caculo de intervalos de confianza para la media, mediana y desviación estándar.

1. Seleccione Estadísticos, Inferencia basada en una muestra e Intervalos de confianza.



2. En la ventana de diálogo seleccione las variables de interés.



Puede elegir entre una cola y dos colas (bilateral).
Seleccione las casillas deseadas (media, mediana, varianza) Si selecciona "Estimación paramétrica" utilizará las formulas tradicionales para calcular los intervalos de confianza. Si selecciona Estimación "bootstrap" utilizará la técnica no paramétrica (remuestreo) para calcular el intervalo de confianza; la cual no requiere del supuesto de normalidad del set de datos.

3. Resultado utilizando estimación paramétrica (requiere normalidad de los datos).

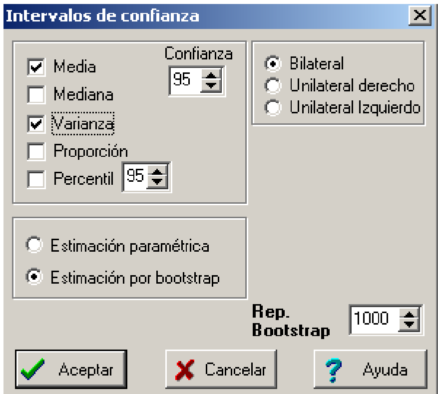
Intervalos de confianza

Bilateral
Estimación paramétrica

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%))	LS(95%))
dimetro (cm)	Media	35.65	2.31	46	31.00	40.30
dimetro (cm)	Mediana	33.50	3.62	46	26.20	40.80
dimetro (cm)	Varianza	244.94	51.64	46	168.51	388.58
altura total (m)	Media	27.74	0.94	46	25.85	29.63
altura total (m)	Mediana	28.50	1.47	46	25.54	31.46
altura total (m)	Varianza	40.37	8.51	46	27.78	64.05

E.E.: Error estándar
LI: Límite inferior LS: Límite superior n: tamaño de muestra.
(95%): nivel de confianza.

4. Resultado utilizando *bootstrap* (estimación no paramétrica, no requiere normalidad de los datos).
La técnica de *bootstraping* permite estimar la distribución muestral de un estimador utilizando la técnica de remuestreo con reemplazo. El método se puede utilizar con muestras pequeñas (N < 20) y no requiere el supuesto de normalidad.



Número de repeticiones (muestras)

Percentil = Nivel de confianza (95%)

Intervalos de confianza

Bilateral
Estimación por bootstrap (B=1000)

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%))	LS(95%))
dimetro (cm)	Media	35.76	2.27	46	31.54	40.30
dimetro (cm)	Varianza	239.35	37.73	46	170.21	316.15
altura total (m)	Media	27.73	0.94	46	25.80	29.59
altura total (m)	Varianza	39.61	7.05	46	25.54	54.06

La diferencia entre ambos métodos de estimación es mínima en el límite inferior (1,7 cm^2) sin embargo difiere un poco más en el límite superior (72,43 cm^2), como puede apreciarse a continuación. La ventaja del segundo método es que no requiere de la condición de normalidad.

Método paramétrico		Método no paramétrico	
Límite inferior	Límite inferior	Límite inferior	Límite inferior
168,51	388,58	170,21	316,15

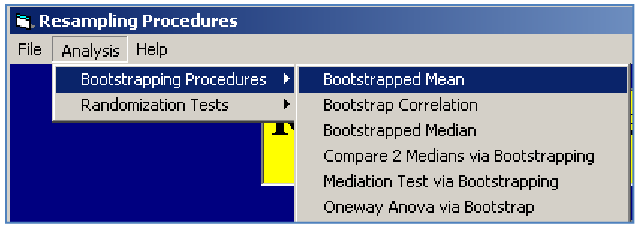
4. Intervalos de confianza en "Resampling Stats"

El programa "resampling stats" le permite utilizar remuestreo para estimar la media y el intervalo de confianza de una muestra sin el requerimiento de normalidad para el set de datos. La técnica de *Bootstraping* permite estimar la distribución muestral de un estimador utilizando la técnica de remuestreo con reemplazo. El método se puede utilizar con muestras pequeñas (N < 20). El puede obtenerse de http://www.uvm.edu/~dhowell/StatPages/Resampling/Resampling.html.

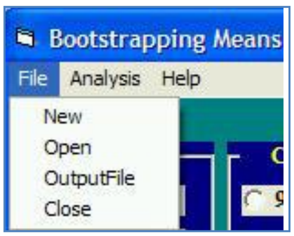
1. Haga un doble clic sobre el archivo Resampling.exe

2. Digite sus datos ó ejecute copiar y pegar de un set de datos de Excel. La primera línea del archivo corresponde al número de observaciones. Guarde los datos con la terminación .dat (e.g. pt.dat).

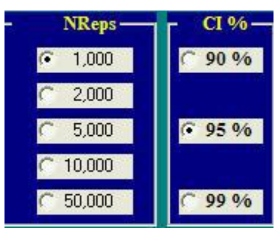
3. Seleccione del menú de análisis la opción: *Bootstrapped Mean* (para calcular IC para la media, note que el programa también calcula el IC para la mediana-Median).



4. Habla el archivo recién creado (i.e. pt.dat). File, open.



5. Usted puede configurar: Numero de repeticiones (NReps) y el nivel de confianza (CI%)

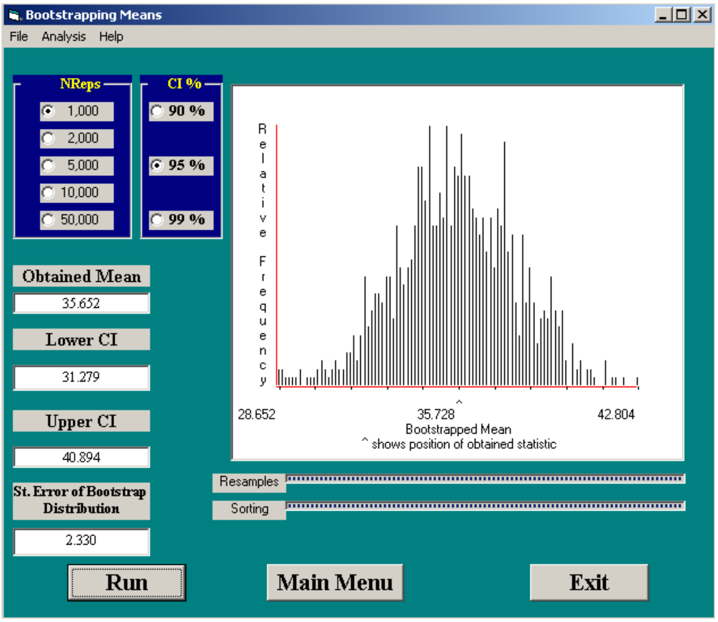


Al marcar 1.000, el programa crea 1000 muestras con reemplazo del set de datos y a partir de ellas calcula el IC.

6. Haga un clic sobre 

para realizar los cálculos.

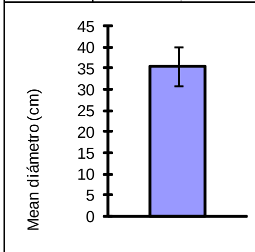
7. Resultado. A continuación se muestran los resultados del análisis.



Media estimada: 35,65cm
Límite inferior del IC: 31,28 cm
Límite superior del IC: 40,89 cm
Error estándar : 2,33cm

El resultado obtenido con el método paramétrico sería el siguiente:

Confidence Intervals for μ		
Type (2,U,L)	2	
Confidence Level	0.95	
ME	Lower	Upper
4.647671	31.0045	40.29984



Vertical axis title
Mean diámetro (cm)

Numerical Summaries for diámetro (cm)

Number	46	Kurtosis	-0.905	Min	10
Mean	35.65217	10 % Tr mean	35.15	Q_1	22.25
St Dev	15.65065	StdErr Mean	2.307563	Median	33.5
Coeff of Var	0.438982			Q_3	45
Skew	0.278263			Max	68

Media estimada: 35,65cm
Límite inferior del IC: 31,00 cm
Límite superior del IC: 40,30 cm
Error estándar: 2,31cm
ME: error medio = (40,299 – 31,004) / 2 = 4,64 cm
Intervalo = μ ± 4,64 cm

5. Bibliografía

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods. 2012. "Tolerance intervals for a normal distribution". Engineering Statistics Handbook. NIST/Sematech. Disponible en http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section2/prc263.htm. Visitado 20 junio 2012.

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods. 2012. "What are confidence intervals?" Engineering Statistics Handbook. NIST/Sematech. Disponible en http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section1/prc14.htm. Visitado 20 junio 2012.

Snedecor, G.W. and Cochran, W.G. 1980. Statistical methods. Seventh Ed. Iowa, The Iowa State University Press. 507p.

Steel, R.G.D. y Torrie, J.H. 1980. Principles and procedures of Statistics.McGraw-Hill. 629p.

6. Ejercicios

1. Defina qué es un intervalo de confianza y explique cuál es su importancia en el análisis de datos.

2. Describa los factores que inciden en la amplitud del intervalo de confianza.

3. ¿Cuáles criterios utilizaría usted para decidir sobre el nivel de confianza del intervalo?

4. Bajo qué circunstancias utilizaría usted la distribución Z para calcular un IC. ¿Cuál sería el impacto sobre la amplitud del IC si el tamaño de muestra fuera 20, 30 y 50 y se desea calcular un IC con un 99% de confianza? Sugiero utilizar http://www.danielsoper.com/statcalc3/calc.aspx?id=10 para calcular los valores de "t".

5. Calcule e interprete el intervalo de confianza para la media y la desviación estándar de los datos del archivo diámetro.xlsx. Argumente sobre el nivel de confianza seleccionado.

6. Calcule e interprete el intervalo de confianza para la media y la desviación estándar de los datos del archivo d_h_jaul.xlsx. Argumente sobre el nivel de confianza seleccionado.

7. Utilizando las cinco muestras al azar obtenidas en el capítulo de muestreo calcule:
   a. Intervalo de confianza para la media utilizando un alfa de 0,1; 0,05 y 0,01.
   b. ¿Cuál es el efecto de cambiar el valor de alfa sobre el IC?
   c. Grafique el IC versus muestra. Contienen todos los intervalos el valor de media poblacional (μ).

8. Dado el siguiente intervalo de confianza:

Confidence Intervals for μ		
	Type (2,U,L)	2
	Confidence Level	0.95
ME	Lower	Upper
219.4635	2110.37	2549.297

1. Pertenecen las siguientes medias muestrales a la población descrita por el IC:
   a. 2100 mm
   b. 2500 mm
   c. 2550 mm
   d. 2109 mm

3. ¿Si se utilizaran los datos originales de la serie estadística y se recalculara el IC para un nivel de confianza de 99% cuál sería la respuesta a la pregunta 1?

9. El archivo efecto_borde.xlsx contiene datos de diámetro (cm) de plantación de Jaúl. Los diámetros se clasificaron como borde 8 (hilera externa) e interior (resto de los árboles). Calcule en intervalo de confianza al 99%. Muestran los datos evidencia de que existe un efecto de borde.

10. El archivo efecto_borde_a.xlsx contiene datos de diámetro (cm) de plantación de Jaúl. Los diámetros se clasificaron como borde 8 (dos hileras externas) e interior (resto de los árboles). Calcule en intervalo de confianza al 99%. Muestran los datos evidencia de que existe un efecto de borde.